УДК 519.622

Е. А. Новиков

АЛГОРИТМ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРЕХСТАДИЙНЫХ МЕТОДОВ ТИПА РУНГЕ – КУТТЫ И РОЗЕНБРОКА[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Проблема решения задачи Коши для жестких систем большой размерности возникает при моделировании физических и химических процессов, при аппроксимации уравнений в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений и во многих других важных приложениях. Учет большого числа факторов при построении математических моделей приводит к расширению класса задач, описываемых жесткими системами большой размерности. Сложность практических задач приводит к возрастающим требованиям к вычислительным алгоритмам.

Материалы и методы. В случае большой размерности жесткой системы дифференциальных уравнений основные затраты приходятся на декомпозицию матрицы Якоби. В некоторых алгоритмах применяется замораживание матрицы Якоби, т.е. одна матрица используется на нескольких шагах интегрирования. Проблема замораживания матрицы достаточно просто решается в методах, в которых стадии вычисляются с применением итерационного процесса. Для безытерационных численных формул это существенная проблема. В данной работе сокращение затрат достигается за счет комбинирования явных и L-устойчивых методов по критерию устойчивости в процессе расчетов.

Результаты. Создан алгоритм интегрирования переменной структуры на основе явной схемы типа Рунге – Кутты и L-устойчивого метода типа Розенброка третьего порядка. На каждом шаге эффективная численная формула выбирается по критерию устойчивости. Оценка максимального собственного числа матрицы Якоби, необходимая для переключения между методами, для явных численных схем определяется степенным методом через ранее вычисленные стадии, а для метода типа Розенброка – через норму матрицы Якоби. Построены неравенства для контроля точности и устойчивости. Приведены результаты расчетов.

Выводы. Алгоритм интегрирования предназначен для решения жестких задач большой размерности. Результаты расчетов подтверждают эффективность построенного алгоритма.

Ключевые слова: жесткая система, схемы типа Рунге – Кутты и Розенброка, контроль точности и устойчивости, автоматический выбор метода.

E. A. Novikov

VARIABLE STRUCTURE ALGORITHM APPLYING 3-STAGE METHODS OF RUNGE-KUTTA AND ROSENBROCK TYPES

Abstract.

Background. The Cauchy problem for large-scale stiff systems arises in simulation of physical and chemical processes, in approximation of partial differential equations by a system of ordinary differential equations and in plenty of other im-

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00047).

portant applications. Taking into consideration a large number of factors in model development leads to expansion of a class of problems, determined by stiff systems of high dimension. The complexity of practical problems leads to additional requirements to computational algorithms.

Materials and methods. Dealing with high dimensionality of a stiff system of ordinary differential equations, the main computational expenses concern the Jacobi matrix decomposition. In some algorithms one may use freezing of the Jacobi matrix, i.e. applying the same matrix over several integration steps. The problem of freezing is solved rather easy in those methods, the stages of which are computed using some iterative processes. For non-iterative numerical formulas the freezing is quite a difficult problem. In this study, the costs reduction was achieved by combining explicit and L-stable methods using the criterion of stability in calculations.

Results. The author has created an algorithm of variable structure integration, based on the explicit scheme of the Runge-Kutta type and the L-stable method of the Rosenbrock type. Both schemes have the third order of accuracy. An efficient numerical formula was chosen according to the criterion of stability at each step of integration. Estimation of maximum eigen value, which is necessary to switch between the methods, for explicit numerical schemes was determined by power iterations using already computed stages, and using the Jacobi matrix norm for the Rosenbrock type method. The researcher also formulated inequalities for accuracy and stability control. The article adduces the results of calculations.

Conclusions. The integration algorithm is aimed at solving stiff problems of high dimension. Numerical results confirm the efficiency of the constructed algorithm.

Key words: stiff system, schemes of Runge-Kutta and Rosenbrock types, accuracy and stability control, automatic selection of a method.

Введение

Проблема решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности возникает во многих важных прикладных задачах [1–3]. Для численного решения жестких задач обычно применяются L-устойчивые методы [1]. При реализации таких численных схем на каждом шаге решается линейная система алгебраических уравнений с применением LU-разложения некоторой матрицы, размерность которой совпадает с размерностью вектора решения. В силу плохой обусловленности матрицы Якоби жесткой системы дифференциальных уравнений, решение алгебраической системы осуществляется с выбором главного элемента по строке или столбцу, а иногда и по всей матрице. При большой размерности исходной задачи общие вычислительные затраты фактически полностью определяются временем декомпозиции данной матрицы.

В последнее время при решении жестких задач широкое распространение получили методы типа Розенброка [4], которые относятся к одношаговым безытерационным численным формулам. В отличие от неявных или полуявных методов типа Рунге – Кутты, в данных численных схемах матрица Якоби введена непосредственно в вычислительную формулу. В результате вместо решения нелинейных систем алгебраических уравнений на каждом шаге несколько раз решается линейная система. Введение матрицы Якоби в численную схему является и недостатком, потому что возникают принципиальные проблемы с замораживанием матрицы Якоби [3]. Известно, что максимальный порядок точности численных формул с замораживанием равен двум [5]. Это означает, что применение методов типа Розенброка ограничено либо задачами небольшой размерности, либо расчетами с небольшой точностью [6].

Некоторым аналогом замораживания матрицы Якоби является применение в расчетах алгоритмов интегрирования на основе явных и L-устойчивых методов с автоматическим выбором численной схемы [7]. В этом случае эффективность алгоритма может быть повышена за счет расчета переходного участка, соответствующего максимальному собственному числу матрицы Якоби, явным методом. В качестве критерия выбора эффективной численной формулы естественно применять неравенство для контроля устойчивости [8]. Применение таких комбинированных алгоритмов полностью не снимает проблему замораживания матрицы Якоби, потому что явным методом можно просчитать, вообще говоря, только погранслойное решение, соответствующее максимальному собственному числу матрицы Якоби.

Здесь на основе явного метода типа Рунге – Кутты и L-устойчивой схемы типа Розенброка третьего порядка точности построен явно-неявный алгоритм переменной конфигурации. Выбор эффективной численной формулы на каждом шаге осуществляется по критерию устойчивости. Приведены результаты расчетов, подтверждающие эффективность алгоритма интегрирования переменной структуры.

1. Метод Рунге – Кутта – Фельберга третьего порядка

Для численного решения задачи Коши

$$y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0,\ t_0 \le t \le t_k, \tag{1}$$

будем применять явный трехстадийный метод следующего вида:

$$y_{n+1} = y_n + p_{p1}k_1 + p_{p2}k_2 + p_{p3}k_3,$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n),\ k_2 = hf(t_n + h, y_n + k_1),$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right). \tag{2}$$

При значениях параметров

$$p_{31} = p_{32} = 1/6,\ p_{33} = 2/3, \tag{3}$$

формула (2) совпадает с методом Фельберга третьего порядка [9], а при коэффициентах

$$p_{21} = p_{22} = 0.5,\ p_{23} = 0, \tag{4}$$

формула (2) имеет второй порядок точности. Введем обозначения

$$\varepsilon_{n,3} = \left\| \sum_{i=1}^{3} (p_{3i} - p_{2i}) k_i \right\| = \frac{1}{3}\|2k_3 - k_2 - k_1\|,$$

где $\|\cdot\|$ – некоторая норма в R^N.

Тогда для контроля точности схемы (2) с коэффициентами (3) можно применять неравенство $\varepsilon_{n,3} \le \varepsilon$, где ε – требуемая точность интегрирования.

2. Контроль устойчивости

Известно, что метод (2), (3) при решении нежестких задач является эффективным. Однако его применение для расчета жестких задач на участке установления приводит к большому числу повторных вычислений решения (возвратов) за счет возникающей неустойчивости. Этих возвратов частично можно избежать за счет дополнительного контроля устойчивости численной схемы [8]. Построим неравенство для контроля устойчивости. Для этого применим метод (2), (3) для решения тестовой задачи Далькквиста [10]:

$$y' = \lambda y \,,\ \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \,,\ y(0) = y_0 \,,\ t \ge 0 \,. \qquad (5)$$

В результате получим $y_{n+1} = Q_3(x) y_n$, где $x = h \cdot \lambda$, а многочлен устойчивости $Q_3(x)$ имеет вид $Q_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$. На рис. 1 приведены линии уровня $|Q_3(x)| = q$ при значении q, равном 1; 0,7 и 0,3. Многочлен устойчивости $Q_2(x)$ метода (2), (4) второго порядка точности имеет вид $Q_2(x) = 1 + x + 0{,}5x^2$, а его область устойчивости приведена на рис. 2.

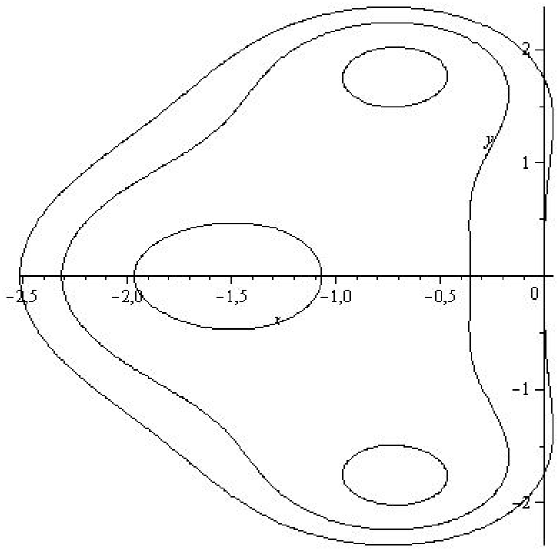

Рис. 1. Область устойчивости метода третьего порядка

Для построения неравенства для контроля устойчивости метода (2), (3) запишем стадии k_1, k_2 и k_3 применительно к задаче $y' = Ay$, где A есть матрица с постоянными коэффициентами. Получим

$$k_1 = Xy_n \,,\ k_2 = \left(X + X^2\right) y_n \,,\ k_3 = \left(X + 0{,}5X^2 + 0{,}25X^3\right) y_n \,,$$

где $X = hA$.

Нетрудно видеть, что выполнены соотношения

$$k_2 - k_1 = X^2 y_n \,,\ 2 \cdot \left(2k_3 - k_2 - k_1\right) = X^3 y_n \,.$$

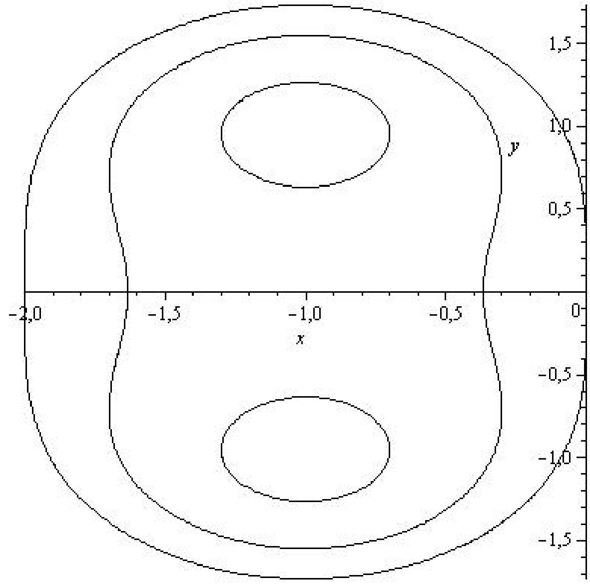

Рис. 2. Область устойчивости метода второго порядка

Тогда оценку максимального собственного числа $v_n = h\left|\lambda_{n,\max}\right|$ матрицы Якоби задачи (1) можно вычислить степенным методом по приближенной формуле

$$v_n = 2 \cdot \max_{1 \le i \le N} \left\{ \left| 2k_3^i - k_2^i - k_1^i \right| / \left| k_2^i - k_1^i \right| \right\}. \tag{6}$$

В результате для контроля устойчивости схемы (2) можно применять неравенство $v_n \le D$, где константу D можно выбрать равной $2{,}5$, т.е. примерно равной длине интервала устойчивости схемы (2), (3) (см. рис. 1).

Оценка (6) максимального собственного числа матрицы Якоби задачи (1) является грубой, потому что вовсе не обязательно максимальное собственное число сильно отделено от остальных, в степенном методе применяется мало итераций и дополнительные искажения вносит нелинейность задачи (1). Поэтому здесь контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования. В результате прогнозируемый шаг h_{n+1} вычисляется следующим образом. Новый шаг h^{ac} по точности определяется по формуле $h^{ac} = q_1 h_n$, где h_n есть последний успешный шаг интегрирования, а q_1, учитывая соотношение $\varepsilon_{n,3} = O\left(h_n^3\right)$, задается уравнением $q_1^3 \cdot \varepsilon_{n,3} = \varepsilon$. Шаг h^{st} по устойчивости задается формулой $h^{st} = q_2 h_n$, где q_2, учитывая соотношение $v_n = O\left(h_n\right)$, определяется из равенства $q_2 v_n = 2{,}5$. В результате прогнозируемый шаг h_{n+1} вычисляется по следующей формуле:

$$h_{n+1} = \max\left[h_n, \min\left(h^{ac}, h^{st} \right) \right]. \tag{7}$$

Если шаг по устойчивости должен быть уменьшен, то в качестве следующего шага будет применяться последний успешный шаг h_n. Данная формула позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость. Из результатов расчетов алгоритмом с дополнительным контролем устойчивости следует повышение эффективности примерно в полтора-два раза, однако точности вычислений существенно выше задаваемой. Это естественно, потому что старые ошибки подавляются за счет контроля устойчивости, а новые ошибки на участке установления невелики.

3. Метод типа Розенброка

Для решения задачи (1) рассмотрим численную формулу вида

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3,$$

$$D_n k_1 = hf\left(t_n, y_n\right),\ D_n k_2 = hf\left(t_n + \beta_{21} h, y_n + \beta_{21} k_1\right),$$

$$D_n k_3 = hf\left(t_n + \left[\beta_{31} + \beta_{32}\right] h, y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2\right), \tag{8}$$

где h – шаг интегрирования; $D_n = E - ahf'_n$, E – единичная матрица; $f'_n = \partial f\left(t_n, y_n\right) / \partial y$ – матрица Якоби системы (1); a, p_i и β_{ij} – числовые коэффициенты. Разложим стадии k_i, $1 \le i \le 3$, по степеням h и подставим в первую формулу (8). Полагая $y_n = y\left(t_n\right)$ и сравнивая ряды для точного и приближенного решений до членов с h^3 включительно, получим условия третьего порядка точности схемы (8), которые после несложных преобразований записываются так:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad \beta_{21} p_2 + \beta p_3 = \frac{1}{2} - a, \tag{9}$$

$$\beta_{21}^2 p_2 + \beta^2 p_3 = \frac{1}{3},\ \beta_{21}\beta_{32} p_3 = \frac{1}{6} - a + a^2, \tag{10}$$

где $\beta = \beta_{31} + \beta_{32}$.

Локальная ошибка $\delta_{n,3}$ схемы (8) при условии (10) имеет вид

$$\delta_{n,3} = \left(\frac{1}{24} - a^3 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a\right) h^4 f'^3 f + \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{3}a - \left(\frac{1}{6} - a + a^2\right)\cdot\beta\right] h^4 f'' f' f^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{3}a - \beta_{21}\left(\frac{1}{6} - a + a^2\right)\right] h^4 f' f'' f^2 + \left[\frac{1}{4} - \beta_{21}^3 p_2 - \beta^3 p_3\right] h^4 f''' f^3 + O\left(h^5\right).$$

4. Исследование устойчивости

Применяя численную формулу (8) для решения тестовой задачи (5), имеем $y_{n+1} = Q_r(x) y_n$, где $x = h \cdot \lambda$, а функция устойчивости $Q_r(x)$ имеет вид

$$Q_r(x)=\frac{1+(1-3a)x+\left[3a^2-2a+\beta_{21}p_2+(\beta_{31}+\beta_{33})p_3\right]x^2}{(1-ax)^3}-$$

$$-\frac{\left\{a^3-a^2p_1+a(\beta_{21}-a)p_2-\left[a^2-a(\beta_{31}+\beta_{32})+\beta_{21}\beta_{32}\right]p_3\right\}x^3}{(1-ax)^3}.$$

Необходимым условием L-устойчивости является требование того, чтобы степень многочлена в числителе была на единицу меньше степени полинома в знаменателе. Нетрудно видеть, что это требование будет выполнено, если $a^3-3a^2+1{,}5a-1/6=0$. При записи условия L-устойчивости учтены соотношения (10). Известно [11], что схема (8) будет A-устойчивой, если параметр a удовлетворяет неравенству $1/3\le a\le 1{,}0685790$. Поэтому среди корней уравнения выбираем $a=0{,}435866521508459$, при котором численная схема (8) будет L-устойчивой.

При расчетах по схеме (8) в двух промежуточных точках $t_n+\beta_{21}h$ и $t_n+(\beta_{31}+\beta_{31})h$ вычисляются приближенные решения $y_{n,\alpha}=y_n+\beta_{21}k_1$ и $y_{n,\beta}=y_n+\beta_{31}k_1+\beta_{32}k_2$. Применяя их для решения тестового уравнения (5), имеем $y_{n,\alpha}=Q_\alpha(x)y_n$ и $y_{n,\beta}=Q_\beta(x)y_n$, где функции устойчивости внутренних или промежуточных численных схем имеют вид

$$Q_\alpha(x)=\frac{1+(\beta_{21}-a)x}{1-ax}\cdot y_n,$$

$$Q_\beta(x)=\frac{1+(\beta_{31}+\beta_{32}-2a)x+\left[a^2-a\beta+\beta_{21}\beta_{32}\right]x^2}{(1-ax)^2}\cdot y_n.$$

Для уменьшения влияния ошибок в промежуточных вычислениях потребуем L-устойчивости промежуточных численных формул, что приводят к двум соотношениям $a^2-a\beta+\beta_{21}\beta_{32}=0$ и $\beta_{21}-a=0$. Теперь с учетом равенства $\beta_{21}=a$ условия порядка (10) и устойчивости записываются в виде

$$p_1+p_2+p_3=1,\ ap_2+\beta p_3=0{,}5(1-2a),\ a^2p_2+\beta^2p_3=1/3,$$

$$\beta_{32}p_3=a^{-1}\left(6a^2-6a+1\right)/6,\ \beta_{32}=\beta-a,\ \beta=\beta_{31}+\beta_{32}.$$

Исследуя совместность этой нелинейной алгебраической системы, получим коэффициенты L-устойчивого метода (8) третьего порядка:

$$a=0.435866521508459,\ p_1=\beta_{21}=\beta_{31}=a,$$

$$\beta=a\left(6a^2-6a+1\right)^{-1}\left(6a^2-3a+2\right),\ \beta_{32}=\beta-a,$$

$$p_3=a^{-1}(\beta-a)^{-1}\left(6a^2-6a+1\right)/6,$$

$$p_2 = 0.5a^{-1}(1 - 2a - 2\beta p_3),\ p_1 = 1 - p_2 - p_3.$$

5. Контроль точности вычислений

Контроль точности вычислений построим по аналогии [12]. Для оценки ошибки используем вложенный метод второго порядка

$$y_{n+1,2} = y_n + b_1 k_1 + b_2 k_2,\ D_n k_1 = hf(y_n),\ D_n k_2 = hf(y_n + ak_1),$$

где приближение y_n вычислено по формуле (8), $b_1 = 0{,}5a^{-1}(4a - 1)$ и $b_2 = 0{,}5a^{-1}(1 - 2a)$. В результате оценка ошибки вычисляется по формуле

$$\varepsilon_n(j_n) = D_n^{1-j_n}(y_{n+1} + y_{n+1,2}).$$

Теперь неравенство для контроля точности имеет вид

$$\left\| D_n^{1-j_n}(y_{n+1} + y_{n+1,1}) \right\| \le \varepsilon,\ 1 \le j_n \le 2,$$

где $\|\cdot\|$ – некоторая норма в R^N; ε – требуемая точность интегрирования, а параметр j_n выбирается наименьшим значением, при котором выполняется неравенство.

6. Алгоритм переменной структуры

Оценку максимального собственного числа $v_{n,0} = h \cdot |\lambda_{n,\max}|$ матрицы Якоби системы (1), необходимую для перехода на явную формулу, оценим через ее норму по формуле

$$v_{n,0} = \left| \frac{\partial f(y_n)}{\partial y} \right| = \max_{1 \le i \le N} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial f_i(y_n)}{\partial y_j} \right| \right\}.$$

Норма $\|\xi\|$ в неравенствах для контроля точности вычисляется по формуле

$$\| \xi \| = \max_{1 \le i \le N} \left\{ |\xi_i| / \left(|y_n^i| + r \right) \right\},$$

где r – положительный параметр. В случае выполнения неравенства $|y_n^i| < r$ по i-й компоненте решения контролируется абсолютная ошибка $r \cdot \varepsilon$. В противном случае контролируется относительная ошибка ε.

На основе построенных методов легко сформулировать алгоритм, в котором на каждом шаге выбирается наиболее эффективная численная схема. Расчеты всегда начинаются явным методом, потому что в нем не используется матрица Якоби. Нарушение неравенства $v_n \le 2{,}5$ вызывает переход на L-устойчивую схему, где оценка v_n вычисляется по формуле (6). Передача управления явным методам происходит в случае выполнения неравенства $v_{n,0} \le 2,5$, где оценка $v_{n,0}$ вычисляется через норму матрицы Якоби.

7. Результаты расчетов

Вычисления проводились с двойной точностью, потому что для жестких задач характерен большой разброс входящих в описание задачи констант. В расчетах параметр r выбирался таким образом, чтобы по всем компонентам решения фактическая точность была не хуже задаваемой. Расчеты проводились с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, при которой наиболее эффективны методы третьего порядка. Ниже через i_f и i_d обозначены соответственно суммарное число вычислений правой части и количество декомпозиций матрицы Якоби задачи (1), которые позволяют объективно оценить эффективность алгоритма интегрирования. В качестве тестового примера выбрана простейшая математическая модель с периодическим решением для описания реакции Белоусова – Жаботинского (орегонатор) [13]:

$$y_1' = 77,27\left(y_2 - y_1 y_2 + y_1 - 8,375 \cdot 10^{-6} y_1^2\right),$$

$$y_2' = \frac{1}{77.27}\left(-y_2 - y_1 y_2 + y_3\right), \; y_3' = 0,161\left(y_1 - y_3\right),$$

$$t \in [0,300], \; y_1(0) = y_3(0) = 4, \; y_2(0) = 1,1, \; h_0 = 10^{-3}.$$

Коэффициент жесткости равен примерно 10^7. Для построенного алгоритма переменной структуры вычислительные затраты следующие: $i_f = 3\,983$ и $i_d = 400$, а при расчетах только по численной схеме Розенброка следующие: $i_f = 3\,179$ и $i_d = 706$. Из сравнения затрат следует сокращение числа декомпозиций матрицы Якоби за счет комбинирования методов почти в два раза. Данную задачу можно посчитать явным методом Рунге – Кутта. При расчетах алгоритмом без контроля устойчивости $i_f = 11\,011\,774$, при расчетах с дополнительным контролем устойчивости $i_f = 8\,920\,580$.

Заключение

В построенном алгоритме с помощью признака можно задавать различные режимы расчета:

1) явным методом с контролем или без контроля устойчивости;

2) L-устойчивым методом с аналитической или численной матрицей Якоби;

3) с автоматическим выбором численной схемы.

Все это позволяет применять данный алгоритм для решения как жестких, так и нежестких задач. При расчетах с автоматическим выбором численной схемы вопрос о том, является задача жесткой или нет, перекладывается на алгоритм интегрирования. Из результатов численных расчетов следует существенное сокращение числа декомпозиций матрицы Якоби за счет комбинирования методов, что при решении систем дифференциальных уравнений большой размерности сокращает время вычислений почти в два раза.

Список литературы

1. **Hairer, E.** Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff and Differential-Algebraic Problems / E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner. – Berlin : Springer-Verlag, – 1993. – 528 p.
2. **Hairer, E.** Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems / E. Hairer, G. Wanner. – Berlin : Springer-Verlag, 1996. – 614 p.
3. **Новиков, Е. А.** Компьютерное моделирование жестких гибридных систем / Е. А. Новиков, Ю. В. Шорников. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. – 451 с.
4. **Rosenbrock, H. H.** Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations / H. H. Rosenbrock // Computer. – 1963. – № 5. – P. 329–330.
5. **Новиков, Е. А.** Замораживание матрицы Якоби в методе типа Розенброка второго порядка точности / В. А. Новиков, Е. А. Новиков, Л. А. Юматова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1987. – Т. 27, № 3. – С. 385–390.
6. **Novikov, E. A.** Numerical Integration of Stiff Systems with Low Accuracy / A. E. Novikov, E. A. Novikov // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2010. – Vol. 2, № 4. – P. 443–452.
7. **Novikov, E. A.** Construction of algorithm for the integrating stiff differential equations on no uniform schemes / E. A. Novikov // Soviet Math. Dokl. – 1984. – Vol. 30, № 2. – P. 358–361.
8. **Новиков, Е. А.** Явные методы для жестких систем / Е. А. Новиков. – Новосибирск : Наука, 1997. – 198 с.
9. **Fehlberg, E.** Low order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems / E. Fehlberg. – Washington : NASA T.R.R., 1969. – 316 p.
10. **Dahlquist, G.** A special stability problem for linear multistep methods / G. Dahlquist // BIT. – 1963. – Vol. 3. – P. 23–43.
11. **Демидов, Г. В.** Исследование точности неявных одношаговых методов / Г. В. Демидов, Л. А. Юматова. – Новосибирск : Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1976. – (Препринт № 25).
12. **Демидов, Г. В.** Оценка ошибки одношаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Г. В. Демидов, Е. А. Новиков // Численные методы механики сплошной среды. – 1985. – Т. 16, № 1. – С. 27–39.
13. **Enright, W. H.** Comparing numerical methods for the solutions of systems of ODE's / W. H. Enright, T. E. Hull // BIT. – 1975. – Vol. 15. – P. 10–48.

References

1. Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff and Differential-Algebraic Problems*. Berlin: Springer-Verlag, 1993, 528 p.
2. Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Berlin: Springer-Verlag, 1996, 614 p.
3. Novikov E. A., Shornikov Yu. V. *Komp'yuternoe modelirovanie zhestkikh gibridnykh sistem* [Computer simulation of stiff hybrid systems]. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2012, 451 p.
4. Rosenbrock H. H. *Computer*. 1963, no. 5, pp. 329–330.
5. Novikov E. A., Novikov V. A., Yumatova L. A. *Zhurnal vychislitel'noy matematikt i matematicheskoy fikhiki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 1987, vol. 27, no. 3, pp. 385–390.

6. Novikov E. A., Novikov A. E. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2010, vol. 2, no. 4, pp. 443–452.
7. Novikov E. A. *Soviet reports on mathematics*. 1984, vol. 30, no. 2, pp. 358–361.
8. Novikov E. A. *Yavnye metody dlya zhestkikh sistem* [Explicit methods for stiff systems]. Novosibirsk: Nauka, 1997, 198 p.
9. Fehlberg E. *Low order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems*. Washington: NASA T.R.R., 1969, 316 p.
10. Dahlquist G. *A special stability problem for linear multistep methods*. BIT. 1963, vol. 3, pp. 23–43.
11. Demidov G. V., Yumatova L. A. *Issledovanie tochnosti neyavnykh odnoshagovykh metodov* [Accuracy research for non-explicit one-step methods]. Novosibirsk: Izd-vo VTs SO AN SSSR, 1976, (Preprint № 25).
12. Demidov G. V., Novikov E. A. *Chislennye metody mekhaniki sploshnoy sredy* [Numerical methods of continuum mechanics]. 1985, vol. 16, no. 1, pp. 27–39.
13. Enright W. H., Hull E. *Comparing numerical methods for the solutions of systems of ODE's*. BIT. 1975, vol. 15, pp. 10–48.

Новиков Евгений Александрович
доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН (Россия, г. Красноярск, Академгородок, 50, стр. 44)

Novikov Evgeniy Aleksandrovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, chief researcher, Institute of computational modeling of the Siberian branch of RAS (building 44, 50 Akademgorodok street, Krasnoyarsk, Russia)

E-mail: atp@sstu.ru

УДК 519.622

Новиков, Е. А.

Алгоритм переменной структуры с применением трехстадийных методов типа Рунге – Кутты и Розенброка / Е. А. Новиков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 50–60.